

Matematika A1 - 1. "přeměně" cvičení - dodatek (*)

Vlastnosti absolutní hodnoty reálného čísla

(definice ze cvičení 1. - $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$)

Ukážeme, že pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí následující tvrzení:

1) $|a| = |-a|$

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}, \quad |-a| = \begin{cases} -a, & -a \geq 0, \text{ tj. } a \leq 0 \\ -(-a), & -a < 0 \Leftrightarrow a > 0 \end{cases}$$

což je "lola" (je-li $a=0$ "v $a \geq 0$ " a podruhé "v $a \leq 0$ ", což ale stejně nevadí);

2) $|a| = \max(a, -a)$ ($\max(\alpha, \beta)$ je větší z čísel α, β ,
je-li $\alpha \neq \beta$, jinak $\max(\alpha, \beta) = \alpha = \beta$)

je-li $a \geq 0$, pak $-a \leq 0$, a tedy $\max(a, -a) = a$
je-li $a < 0$, pak $-a > 0$, a tedy $\max(a, -a) = -a$ } a to je "stejně" jako def. $|a|$; !

3) $a \leq c \wedge -a \leq c \Rightarrow |a| \leq c$

tohoto tvrzení snadno plyne z 2):

je-li $a \leq c \wedge -a \leq c$, pak i $\max(a, -a) \leq c$,

tj. (dle 2) $|a| \leq c$, což jsme měli ukázat;

4) $|a+b| \leq |a|+|b|$ - nejvíce důležitá vlastnost
absolutně hodnoty ∇

Jinými slovy dokážeme užitečné předpoklady vlastností 2) a 3):

2) $\Rightarrow$: $a \leq |a|$ i $-a \leq |a|$, a stejně
 $b \leq |b|$ i $-b \leq |b|$;

podm $a+b \leq |a|+|b|$, a také i $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$
 $-(a+b) = -a+(-b) \leq |a|+|-b| = |a|+|b|$ (3)

$|a+b| \leq |a|+|b|$ (což jsme měli ukázat);

a pak už snadno odvod:

$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a|+|-b| = |a|+|b|$

tedy $|a-b| \leq |a|+|b|$

5) a také, když platí $|a+b| \leq |a|+|b|$, $a, b \in \mathbb{R}$,
když zvolíme $a = a-c$, $b = c-b$, pak dostaneme (4)

$|a-c|+|c-b| \leq |a-c|+|c-b|$, tedy

$|a-b| \leq |a-c|+|c-b|$

6) a "odkrok" $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$:

platí: $(a+b)^2 \geq 0$ i $(a-b)^2 \geq 0$, tedy

$0 \leq a^2+2ab+b^2 \Rightarrow -a \cdot b \leq \frac{a^2+b^2}{2}$
a $0 \leq a^2-2ab+b^2 \Rightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ } $\Rightarrow$ (3)

$|a \cdot b| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, což jsme měli ukázat.